TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

Integración con respecto a una medida de probabilidad

Como lo mencionamos en la parte 2, en el año 1902 Henri Lebesgue definió lo que se conoce ahora como medida de Lebesgue, la cual podemos pensar como una extensión del concepto de longitud de un intervalo. Esto lo hizo con el objetivo de definir un concepto de integral que tuviera mejores propiedades que la integral de Riemann y que ampliara el conjunto de funciones integrables.

A partir del trabajo de Lebesgue, se inició un proceso de investigación alrededor de los conceptos de medida y de integral el cual culminó alrededor del año 1930 con la formulación de una teoría general de la medida y de una teoría de integración con respecto a una medida.

En esta tercera parte vamos a ver cómo se define la integral con respecto a una medida de probabilidad, aunque los conceptos, definiciones y resultados son básicamente los mismos que para la integral con respecto a una medida cualquiera; la única particularidad que tiene una medida de probabilidad es que la medida del conjunto total es igual a 1.

Las funciones que se pueden integrar son llamadas funciones medibles, las cuales, en la teoría de la probabilidad, son llamadas variables aleatorias. Es necesario considerar funciones que toman valores en los números reales extendidos, es decir, en $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, ya que una de las propiedades que tiene la integral que vamos a definir consiste en que, bajo determinadas condiciones, si se tiene una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones medibles, que converge puntualmente a una función medible f, la sucesión formada por las integrales de las funciones f_n converge a la integral de f. Cada función f_n podría tomar valores en el conjunto de los números reales, pero en algunos puntos ese límite podría ser ∞ o $-\infty$; de manera que se requiere trabajar con este tipo de funciones.

Funciones medibles

Definición 1. *Llamaremos espacio medible a una pareja* $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$ *donde* $\mathbb{E}$ *es un conjunto y* $\mathcal{E}$ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* $\mathbb{E}$*.*

En lo que sigue de esta sección, $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$ será un espacio medible.

Definición 2. *Diremos que una función* $f : \mathbb{E} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *es medible si* $\{y \in \mathbb{E} : f(y) \leq x\} \in \mathcal{E}$ *para cualquier* $x \in \mathbb{R}$.

Proposición 1. *Si* $f : \mathbb{E} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *es una función medible, entonces* $f^{-1}(B) \in \mathcal{E}$ *para cualquier conjunto* $B \in \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$.

Demostración

Definamos:

$\mathbb{H} = \left\{B \in \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right) : f^{-1}(B) \in \mathcal{E}\right\}$

Vamos a probar que $\mathbb{H}$ es una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de $\mathbb{E}$.

$i)$ $\overline{\mathbb{R}} \in \mathbb{H}$ ya que $f^{-1}\left(\overline{\mathbb{R}}\right) = \mathbb{E} \in \mathcal{E}$.

$ii)$ Si $B \in \mathbb{H}$, entonces $B \in \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$ y $f^{-1}(B) \in \mathcal{E}$, así que $B^c \in \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$ y:

$$f^{-1}(B^c) = \left[f^{-1}(B)\right]^c \in \mathcal{E}$$

Por lo tanto, $B^c \in \mathbb{H}$.

$iii)$ Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $\mathbb{H}$, entonces $B_n \in \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$ y $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{E}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, así que, $\cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{E}$ y:

$$f^{-1}\left(\cup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{E}$$

Por lo tanto, $\cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathbb{H}$.

Así que, efectivamente, $\mathbb{H}$ es una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de $\mathbb{E}$.

Además, como f es una función medible, los conjuntos de la forma $[-\infty, x]$, donde $x \in \mathbb{R}$, pertenecen a $\mathbb{H}$. Por lo tanto, $\mathbb{H}$ contiene a la $\sigma-$álgebra generada por esos conjuntos; es decir, a los borelianos en $\overline{\mathbb{R}}$. Así que:

$$\mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right) \subset \mathbb{H}$$

Finalmente, por la definición de $\mathbb{H}$, todo elemento de $\mathbb{H}$ pertenece a $\mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$, así que:

$$\mathbb{H} \subset \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{H} = \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$$

Es decir, $f^{-1}(B) \in \mathcal{E}$ para cualquier conjunto $B \in \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$. ■

Definición 3. *De manera general, si* $(\mathbb{F}, \mathcal{F})$ *es un espacio medible, diremos que una función* $f : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{F}$ *es medible si* $f^{-1}(B) \in \mathcal{E}$ *para cualquier conjunto* $B \in \mathcal{F}$.

En ocasiones, para evitar confusiones, cuando tengamos una función $f : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{F}$, de un espacio medible en otro, especificaremos la $\sigma-$álgebra definida en cada uno de ellos, escribiendo $f : (\mathbb{E}, \mathcal{E}) \to (\mathbb{F}, \mathcal{F})$.

Las funciones medibles $f : (\mathbb{E}, \mathcal{E}) \to \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$ tienen las siguientes propiedades, las cuales únicamente enunciaremos:

1. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles, entonces:

a) Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, las funciones $\min\{f_1, \ldots, f_n\}$ y $\max\{f_1, \ldots, f_n\}$ son medibles.

b) Las funciones $\inf\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\sup\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ son medibles.

c) Las funciones $\liminf_{n\to\infty} f_n$ y $\limsup_{n\to\infty} f_n$ son medibles.

d) Si $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe para cualquier $x \in \mathbb{E}$ (donde ∞ y $-\infty$ también se incluyen como posibles límites), entonces la función $f : \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ es medible.

2. Si f es una función medible, entonces $f^+ = \max\{f, 0\}$ y $f^- = \max\{-f, 0\}$ son medibles.

3. Si f y g son funciones medibles y $c \in \mathbb{R}$. Entonces las funciones $f+c$, cf y fg son medibles.

4. Si f y g son funciones medibles y $h : \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función tal que $h(x) = f(x) + g(x)$ en todos los puntos $x \in \mathbb{E}$ para los cuales $f(x) + g(x)$ esté definida y h es constante en el conjunto de puntos $x \in \mathbb{E}$ para los cuales $f(x)+g(x)$ no esté definida, entonces h es medible.

5. Si $(\mathbb{E}, \mathcal{E}, \mu)$ es un espacio de medida completo, f una función medible y $g : \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función tal que $g = f$ excepto a lo más en un conjunto de medida cero, entonces g es medible.

6. Si $h : \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right) \mapsto \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$ es una función boreliana y f es una función medible, entonces $h \circ f$ es medible.

7. Si f es una función medible que toma únicamente valores en $\mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $h \circ f$ es medible.

8. Si f es una función medible, entonces las funciones $g = \frac{1}{f} I_{\{x\in\mathbb{E}: f(x)\neq 0\}}$ y $h = |f|^\alpha$, donde $\alpha \geq 0$, son medibles.

Funciones medibles simples

La definición de la integral de una función medible es por etapas; primero se define para las funciones medibles que son llamadas simples, ya que para ese tipo de funciones, cuando son no negativas, la integral se puede definir pensándola como algo equivalente al área bajo la gráfica de la función. El segundo paso consiste en definir la integral para las funciones medibles no negativas, utilizando un resultado que obtuvo Lebesgue, el cual es la base para la definición de la integral, que dice que cualquier función medible no negativa se puede aproximar, por abajo, mediante una sucesión de funciones medibles simples no negativas. Finalmente, la integral de una función medible que toma valores positivos y negativos se define expresando la función en términos de su parte positiva y su parte negativa, las cuales son funciones medibles no negativas.

Vamos entonces a comenzar definiendo las funciones medibles simples y demostrando algunas de sus propiedades.

En la siguiente proposición, se utiliza un método que es bastante común para algunas demostraciones. De manera general, cuando se tiene una familia finita, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, de subconjuntos de un conjunto $\mathbb{E}$, resulta cómodo trabajar con esos conjuntos si se encuentra una partición de $\mathbb{E}$ formada por conjuntos ajenos por parejas, de tal manera que cada uno de los conjuntos A_k, así como su complemento, se puedan expresar como unión de conjuntos de esa partición, además de que, dado un elemento $x \in \mathbb{E}$, permita determinar a qué conjuntos A_k pertenece.

La idea para lograr esto es simple, tal vez únicamente se complica un poco en el caso general por los índices que hay que manejar. Vamos a seguir el método, paso a paso, para hacerlo más sencillo de entender.

Si A_1 y A_2 son subconjuntos de $\mathbb{E}$, podemos partir $\mathbb{E}$ en los siguientes conjuntos:

$A_1 \cap A_2$

$A_1 \cap A_2^c$

$A_1^c \cap A_2$

$A_1^c \cap A_2^c$

Se tiene entonces:

$(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c) \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c)$

$= [(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c)] \cup [(A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c)]$

$= [A_1 \cap (A_2 \cup A_2^c)] \cup [A_1^c \cap (A_2 \cup A_2^c)]$

$= A_1 \cup A_1^c = \mathbb{E}$

$A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c)$

$A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2)$

$A_1^c = (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c)$

$A_2^c = (A_1 \cap A_2^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c)$

Si A_1, A_2 y A_3 son subconjuntos de $\mathbb{E}$, podemos partir $\mathbb{E}$ en los siguientes conjuntos:

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3^c$

$A_1 \cap A_2^c \cap A_3$

$A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c$

$A_1^c \cap A_2 \cap A_3$

$A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c$

$A_1^c \cap A_2^c \cap A_3$

$A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$

En general, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son subconjuntos de $\mathbb{E}$, podemos partir $\mathbb{E}$ en los siguientes conjuntos:

$\{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n : B_k \in \{A_k, A_k^c\}\,,\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$,

los cuales son ajenos por parejas, su unión es $\mathbb{E}$ y cada conjunto A_k (resp. A_k^c) se puede expresar como unión de algunos de esos conjuntos, a saber, todos aquellos que incluyan A_k (resp. A_k^c).

Proposición 2. *Toda función $\varphi : \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}}$ de la forma $\varphi = \sum_{k=1}^{m} b_k I_{E_k}$, donde $m \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_m$ son números reales y $E_1, \ldots, E_m$ son elementos de $\mathcal{E}$, es una función medible.*

Demostración

Los conjuntos de la forma $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$, donde $F_k \in \{E_k, E_k^c\}$ y $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, constituyen una partición de $\mathbb{E}$.

Sea $\mathbb{H}$ la familia de conjuntos no vacíos que son de esa forma.

Se tiene entonces:

1. $F \in \mathcal{E}$ para cualquier $F \in \mathbb{H}$.

2. Si $F, G \in \mathbb{H}$ y $F \neq G$, entonces $F \cap G = \emptyset$.

3. $\cup \{F \subset \mathbb{E} : F \in \mathbb{H}\} = \mathbb{E}$

4. Para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene:

$E_k = \cup \{F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \in \mathbb{H} : F_k = E_k\}$

$E_k^c = \cup \{F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \in \mathbb{H} : F_k = E_k^c\}$

Si $F = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \in \mathbb{H}$, para $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, definamos:

$t_F^{(k)} = \begin{cases} b_k & \text{si } F_k = E_k \\ 0 & \text{si } F_k = E_k^c \end{cases}$

y $t_F = \sum_{k=1}^{n} t_F^{(k)}$.

Entonces:

$\varphi(\omega) = t_F$ para cualquier $\omega \in F$, así que:

$$\varphi = \sum_{F \in \mathbb{H}} t_F I_F$$

Obsérvese que los números reales t_F no necesariamente son distintos.

Finalmente, si $\varphi(\mathbb{E}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, entonces, para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\varphi^{-1}(\{x_j\})$ es una unión finita de conjuntos en $\mathbb{H}$. Por lo tanto, para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $\varphi^{-1}([-\infty, x])$ también es una unión finita de conjuntos en $\mathbb{H}$. Así que φ es una función medible.

■

Definición 4. *Diremos que una función medible* $\varphi : \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}}$ *es simple si tiene la forma* $\varphi = \sum_{k=1}^{m} b_k I_{E_k}$*, donde* $b_1, \ldots, b_m$ *son números reales y* $E_1, \ldots, E_m$ *son elementos de* $\mathcal{E}$*.*

Obsérvese que cualquier función medible simple únicamente toma valores en $\mathbb{R}$.

El resultado siguiente es la base para demostrar muchas de las propiedades que tienen las funciones medibles, así como para definir la integral de una función medible no negativa.

Teorema 1. *Sea* $f : \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}}$ *una función medible no negativa, entonces existe una sucesión no decreciente de funciones medibles simples no negativas* $\varphi_n : \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}}$ *tales que* $\lim_{n \to \infty} \varphi_n(y) = f(y)$ *para cualquier* $y \in \mathbb{E}$*.*

Demostración

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos:

$$\varphi_n(y) = \begin{cases} \sum_{m=1}^{n2^n} \frac{m-1}{2^n} I_{\left\{z \in \mathbb{E}: \frac{m-1}{2^n} \leq f(z) < \frac{m}{2^n}\right\}}(y) & \text{si } f(y) < n \\ n & \text{si } f(y) \geq n \end{cases}$$

Obsérvese que aunque, para cada $y \in \mathbb{E}$ tal que $f(y) < n$, $\varphi_n(y)$ es una suma, únicamente uno de los términos es distinto de cero.

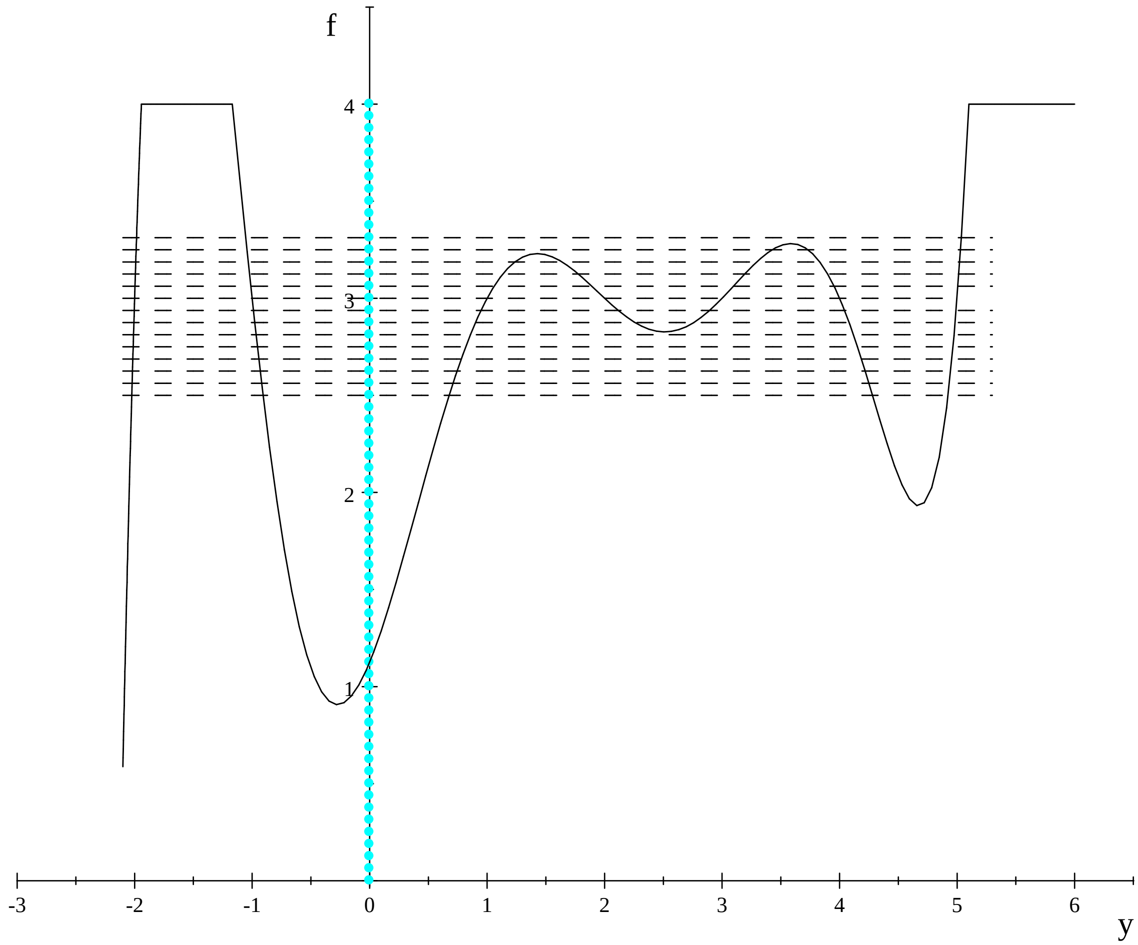
También podríamos escribir la definición de φ_n de la siguiente manera:

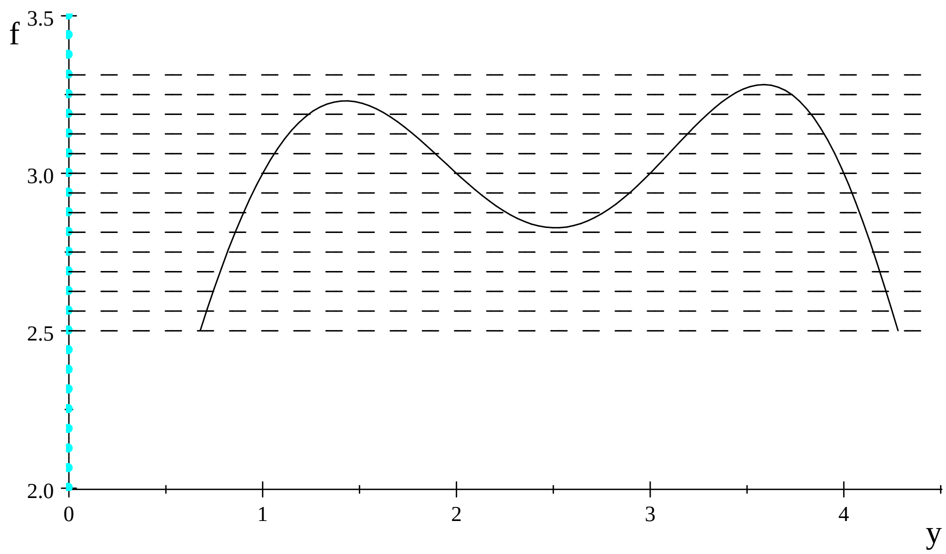
$$\varphi_n(y) = \begin{cases} \frac{m-1}{2^n} & \text{si } \frac{m-1}{2^n} \leq f(y) < \frac{m}{2^n} \text{ y } m \in \{1, 2, \ldots, n2^n\} \\ n & \text{si } f(y) \geq n \end{cases}$$

Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(y) = \frac{1}{2^7}(y+2)(y+1)(y-1)(y-2)(y-3)(y-4)(y-5) + 3$$

Si consideramos, a manera de ejemplo, $n = 4$,el intervalo $[0, 4)$, sobre el eje vertical, se parte en subintervalos de longitud $\frac{1}{2^4}$.


f
4
3
2
1
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
y


f
3.5
3.0
2.5
2.0
0
1
2
3
4
y

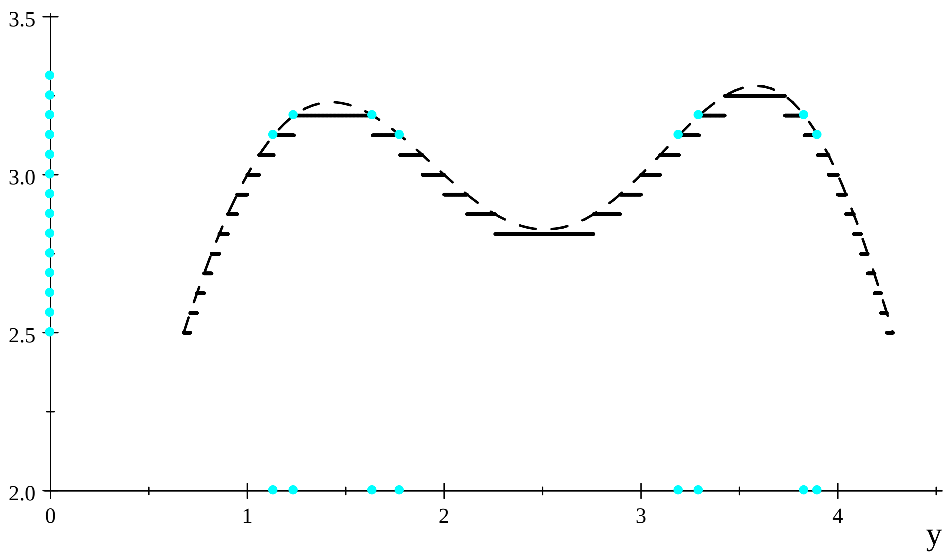
Entonces, por ejemplo:

$f^{-1}\left(\left[\frac{50}{2^4}, \frac{51}{2^4}\right)\right) = [1.134, 1.237) \cup [1.637, 1.776) \cup [3.193, 3.295\,) \cup [3.831, 3.898\,)$

Así que:

$\varphi_4(y) = \frac{50}{2^4}$ si $y \in [1.134, 1.237) \cup [1.637, 1.776) \cup [3.193, 3.295\,) \cup [3.831, 3.898\,)$.

En la siguiente figura se muestran las gráficas de f y de φ_4 para valores de f en el intervalo $\left[\frac{40}{16}, \frac{53}{16}\right)$.



Pasemos ahora a la demostración del enunciado del teorema:

Si $y \in \mathbb{E}$ es tal que $f(y) = \infty$, entonces $\varphi_n(y) = n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, así que:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(y) = \infty = f(y)$$

Si $n \in \mathbb{N}$ y $y \in \mathbb{E}$ es tal que $f(y) < n$, sea m el único número natural tal que $\frac{m-1}{2^n} \leq f(y) < \frac{m}{2^n}$. Entonces, como $\varphi_n(y) = \frac{m-1}{2^n}$, se tiene:

$f(y) - \frac{1}{2^n} < \varphi_n(y) \leq f(y)$, así que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(y) = f(y)$.

Ahora bien, como $\frac{2(m-1)}{2^{n+1}} \leq f(y) < \frac{2m}{2^{n+1}}$, se tiene que, o bien $\frac{2m-2}{2^{n+1}} \leq f(y) < \frac{2m-1}{2^{n+1}}$ o bien $\frac{2m-1}{2^{n+1}} \leq f(y) < \frac{2m}{2^{n+1}}$.

En el primer caso, se tiene:

$$\varphi_{n+1}(y) = \frac{2m-2}{2^{n+1}} = \frac{m-1}{2^n} = \varphi_n(y)$$

En el segundo, se tiene:

$$\varphi_{n+1}(y) = \frac{2m-1}{2^{n+1}} > \frac{2m-2}{2^{n+1}} = \varphi_n(y)$$

Así que, en cualquier caso, $\varphi_n(y) \leq \varphi_{n+1}(y)$.

Así que, φ_n es una sucesión no decreciente de funciones simples no negativas tales que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(y) = f(y)$ para cualquier $y \in \mathbb{E}$.

■

Si $\varphi = \sum_{k=1}^{m} b_k I_{G_k}$ es una función simple entonces el conjunto de los valores que toma es finito. Sea $\{a_1, \ldots, a_n\}$ el conjunto formado por todos los distintos posibles valores no nulos de φ y, para $k \in \{1, \ldots, n\}$, sea $E_k = \{y \in \mathbb{E} : \varphi(y) = a_k\}$, entonces los conjuntos $E_1, \ldots, E_n$ son ajenos por parejas y $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}$. Esta última sumatoria será llamada la **representación canónica** de φ.

Integración de funciones medibles simples

Consideremos un espacio de probabilidad completo $(\mathbb{E}, \mathcal{E}, \mu)$.

Si $\varphi : (\mathbb{E}, \mathcal{E}, \mu) \to \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$ es una función medible simple no negativa, expresada en su forma canónica, es decir, si tiene la forma $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}$, donde $a_1, \ldots, a_n$ son números reales positivos distintos y $E_1, \ldots, E_m$ son elementos de $\mathcal{E}$, ajenos por parejas, entonces:

Para $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\varphi(y) = a_k$ para cualquier $y \in E_k$.

$\varphi(y) = 0$ si $y \notin \cup_{k=1}^{m} E_k$.

Así que, pensando a la integral de una función como algo similar al área bajo la grafica de la función, restringiéndonos a E_k, la integral de φ podemos definirla como $a_k \mu(E_k)$. De esta manera tendríamos algo equivalente a la integral de Riemann, para la cual, si $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ toma un valor constante c en un intervalo $[a, b]$, su integral en ese intervalo es igual a c multiplicado por la longitud del intervalo. En el caso general estaríamos sustituyendo la medida longitud por la medida μ.

Siguiendo esta idea y con la intención de que la integral que queremos definir sea una funcional lineal, tendríamos:

$$\int_{\mathbb{E}} \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k)$$

Nuevamente siguiendo la idea de que queremos definir una integral que sea una funcional lineal, si $\varphi = \sum_{k=1}^{m} b_k I_{F_k}$ es una función medible simple cualquiera, no necesariamente expresada en su forma canónica, su integral debería estar dada por la siguiente expresión:

$$\int_{\mathbb{E}} \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{m} b_k \mu \left(F_k\right)$$

Para que esto sea así requerimos del resultado expresado en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 1. *Demuestra que si* $\varphi = \sum_{j=1}^{m} b_j I_{F_j}$ *es una función medible simple, donde los coeficientes* $b_1, \ldots, b_m$ *son no negativos, con representación canónica* $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}$*, entonces:*

$$\sum_{j=1}^{m} b_j \mu \left(F_j\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu \left(E_k\right)$$

Definición 5. *Si* φ *es una función medible simple no negativa con representación canónica* $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}$*, se define la integral de* φ*,* $\int_{\mathbb{E}} \varphi d\mu$*, de la siguiente manera:*

$$\int_{\mathbb{E}} \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k m \left(E_k\right)$$

Corolario 1. *Sea* $\varphi = \sum_{j=1}^{m} b_j I_{F_j}$ *una función medible simple, donde los coeficientes* $b_1, \ldots, b_m$ *son no negativos, entonces:*

$$\int_{\mathbb{E}} \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{m} b_j m \left(F_j\right)$$

Ejercicio 2. *Demuestra que si* φ *y* ψ *son dos funciones medibles simples no negativas, entonces:*

a) $\int_{\mathbb{E}} \left[a\varphi + b\psi\right] d\mu = a \int_{\mathbb{E}} \varphi d\mu + b \int_{\mathbb{E}} \psi d\mu$ *para cualesquiera números reales* a *y* b *no negativos.*

b) Si $\varphi \leq \psi$*, entonces* $\int_{\mathbb{E}} \varphi d\mu \leq \int_{\mathbb{E}} \varphi d\mu$*.*

Proposición 1. *Sea* φ *una función medible simple no negativa. Entonces, la función* $m : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}$*, definida por* $m(E) = \int_E \varphi d\mu$*, es una medida.*

Demostración

Obviamente, m es no negativa, $m(\emptyset) = 0$ y, por el resultado del ejercicio 2, es finitamente aditiva.

Sea $\sum_{k=1}^{k} a_j I_{Ej}$ la representación canónica de φ, A_n una sucesión creciente de conjuntos en $\mathcal{E}$ y $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces:

$$\int_{A_n} \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{k} a_j \mu \left(A_n \cap E_j\right)$$

$$\int_{A} \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{k} a_j \mu \left(A \cap E_j\right)$$

Así que:

$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \varphi d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k} a_j \mu\left(A_n \cap E_j\right)$

$= \sum_{j=1}^{k} a_j \lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n \cap E_j\right) = \sum_{j=1}^{k} a_j \mu\left(A \cap E_j\right)$

$= \int_A \varphi d\mu = m(A)$

Considerando que la propiedad que acabamos de demostrar es equivalente a la $\sigma-$aditividad, podemos concluir que m es una medida.

■

Integración de funciones medibles no negativas

Una vez definida la integral para las funciones medibles simples no negativas, pasaremos a definir la integral de cualquier función medible no negativa $f : (\mathbb{E}, \mathcal{E}, \mu) \to \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$ utilizando el hecho de que f se puede aproximar con funciones medibles simples no negativas.

Definición 6. *Si $f : (\mathbb{E}, \mathcal{E}, \mu) \to \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$ es una función medible no negativa, se define la integral de f, con respecto a la medida μ, $\int_{\mathbb{E}} f d\mu$, de la siguiente manera:*

$$\int_{\mathbb{E}} f d\mu = \sup\left\{\int_{\mathbb{E}} \varphi d\mu : \varphi \text{ es simple y } 0 \leq \varphi \leq f\ \right\}$$

Obsérvese que el conjunto $\left\{\int_{\mathbb{E}} \varphi d\mu : \varphi \text{ es simple y } 0 \leq \varphi \leq f\ \right\}$ no necesariamente está acotado, de manera que estamos considerando que, en ese caso, el supremo del conjunto lo definimos como ∞.

Definición 7. *Si f es una función medible no negativa y $E \in \mathcal{E}$, se define:*

$$\int_E f d\mu = \int_{\mathbb{E}} \left(I_E \cdot f\right) d\mu$$

Ejercicio 3. *Demuestra que si f y g son dos funciones medibles no negativas, entonces:*

a) Si $f \leq g$, entonces $\int_{\mathbb{E}} f d\mu \leq \int_{\mathbb{E}} g d\mu$.

b) Si $f \leq g$ sobre un conjunto $E \in \mathcal{E}$, entonces $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.

Proposición 2. *Sea f una función medible no negativa y $E \in \mathcal{E}$ tal que $\mu\left(E\right) = 0$; entonces:*

$$\int_E f d\mu = 0$$

Demostración

Supongamos que $\int_E f d\mu > 0$; entonces, como:

$\int_E f d\mu = \int_{\mathbb{E}} (I_E \cdot f)\, d\mu = \sup \left\{ \int_{\mathbb{E}} \varphi d\mu : \varphi \text{ es simple y } 0 \leq \varphi \leq I_E \cdot f \ \right\}$,

existe alguna función medible simple no negativa φ tal que $0 \leq \varphi \leq I_E \cdot f$ y $\int_{\mathbb{E}} \varphi d\mu > 0$.

Sea $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}$ la representación canónica de φ. Entonces:

Como $0 \leq \varphi \leq I_E \cdot f$, $\varphi(y) = 0$ para cualquier $y \in E^c$; así que $\varphi = I_E \cdot \varphi$. Por lo tanto, se tiene:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k \cap E}$$

Así que:

$$0 \leq \int_{\mathbb{E}} \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k \cap E) = 0$$

Así que:

$$\int_{\mathbb{E}} \varphi d\mu = 0$$

Llegamos entonces a una contradicción. Por lo tanto, $\int_E f d\mu = 0$.

■

Demostremos ahora el primero de los teoremas de convergencia de la integral.

Teorema 2 (Teorema de la convergencia monótona). *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión no decreciente de funciones medibles no negativas, entonces:*

$$\int_{\mathbb{E}} \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{E}} f_n d\mu$$

Demostración

Sea $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ y φ una función medible simple no negativa tal que $\varphi \leq f$, $\alpha \in (0,1)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{y \in \mathbb{E}: f_n(y) \geq \alpha\varphi(y)\}$. Entonces, la sucesión A_n es creciente y $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{E}$. Además, la función $m : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}$, definida por $m(E) = \int_E \varphi d\mu$, es una medida, así que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \varphi d\mu = \int_{\mathbb{E}} \varphi d\mu$$

Por otra parte, $\alpha \int_{A_n} \varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int_{\mathbb{E}} f_n d\mu$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, así que:

$$\alpha \int_{\mathbb{E}} \varphi d\mu = \alpha \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \varphi d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{E}} f_n d\mu$$

Haciendo tender α a 1, se obtiene entonces:

$$\int_{\mathbb{E}} \varphi d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{E}} f_n d\mu$$

Por lo tanto:

$$\int_{\mathbb{E}} f d\mu = \sup \left\{ \int_{\mathbb{E}} \varphi d\mu : \varphi \text{ es simple y } 0 \leq \varphi \leq f \ \right\} \leq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{E}} f_n d\mu$$

Por otra parte, como $f \geq f_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\int_{\mathbb{E}} f d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{E}} f_n d\mu$$

Así que:

$$\int_{\mathbb{E}} \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_{\mathbb{E}} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{E}} f_n d\mu$$

■

Proposición 3. *Si f y g son dos funciones medibles no negativas, entonces:*

a) $\int_{\mathbb{E}} [af + bg] \, d\mu = a \int_{\mathbb{E}} f d\mu + b \int_{\mathbb{E}} g d\mu$ para cualesquiera números reales a y b no negativos.

b) $\int_{\mathbb{E}} f d\mu = 0$ si y sólo si $\mu \{y \in \mathbb{E} : f(y) > 0\} = 0$.

Demostración

Para la primera propiedad, sean φ_n y ψ_n dos sucesiones no decrecientes de funciones simples no negativas tales que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(y) = f(y)$ y $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} \psi_n(y) = g(y)$ para cualquier $y \in \mathbb{E}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\int_{\mathbb{E}} [a\varphi_n + b\psi_n] \, d\mu = a \int_{\mathbb{E}} \varphi_n d\mu + b \int_{\mathbb{E}} \psi_n d\mu$$

Así que, por el teorema de la convergencia monótona, se tiene:

$$\int_{\mathbb{E}} [af + bg] \, d\mu = a \int_{\mathbb{E}} f d\mu + b \int_{\mathbb{E}} f_n d\mu$$

Para la segunda propiedad supongamos que $\int_{\mathbb{E}} f d\mu = 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $E_n = \left\{ y \in \mathbb{E} : f(y) > \frac{1}{n} \right\}$, entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\int_{\mathbb{E}} f d\mu \geq \int_{E_n} f d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(E_n)$$

Si $\mu(E_n)$ fuera positiva, se tendría $\int_{\mathbb{E}} f d\mu > 0$, por lo tanto $\mu(E_n) = 0$.

Finalmente, $\mu(\{y \in \mathbb{E} : f(y) > 0\}) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(E_n) = 0$.

Inversamente, supongamos que $\mu(\{y \in \mathbb{E} : f(y) > 0\}) = 0$ y sea φ una función medible simple tal que $0 \leq \varphi \leq f$, entonces $\mu(\{y \in \mathbb{E} : \varphi(y) > 0\}) = 0$, así que $\int_{\mathbb{E}} \varphi d\mu = 0$; por lo tanto:

$$\int_{\mathbb{E}} f d\mu = \sup\left\{ \int_{\mathbb{E}} \varphi d\mu : \varphi \text{ es simple y } 0 \leq \varphi \leq f \right\} = 0 \qquad \blacksquare$$

Teorema 3. *Sea f una función medible no negativa. Entonces, la función $m : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}$, definida por $m(E) = \int_E f d\mu$, es una medida.*

Demostración

Obviamente, m es no negativa y, por el inciso (a) de la proposición anterior, es finitamente aditiva.

Sea A_n una sucesión monótona no decreciente de conjuntos en $\mathcal{E}$ y $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces, la sucesión de funciones $(I_{A_n} f)_{n\in\mathbb{N}}$ es no decreciente y $\lim_{n\to\infty} I_{A_n} f = I_A f$, así que, por el teorema de la convergencia monótona:

$$m(A) = \int_A f d\mu = \int_{\mathbb{E}} I_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{E}} I_{A_n} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f d\mu = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$$

$\blacksquare$

Recordatorio

I. Sea (x_n) una sucesión de números reales. Se dice que un número real x es punto límite de (x_n) si existe una subsucesión de (x_n) que converge a x. También diremos que ∞ (resp. $-\infty$) es punto límite de (x_n) si existe una subsucesión de (x_n) que diverge a ∞ (resp. $-\infty$).

II. Si la sucesión (x_n) está acotada entonces existe por lo menos un número real x que es punto límite de (x_n).

III. Si una sucesión (x_n) no está acotada, entonces existe una subsucesión que diverge a ∞ o a $-\infty$, así que, toda sucesión tiene por lo menos un punto límite.

IV. Una sucesión (x_n) converge a $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si x es el único punto límite de (x_n).

V. Sea (x_n) una sucesión de números reales. Definimos el límite superior de (x_n), $\limsup x_n$, y el límite inferior de (x_n), $\liminf x_n$, de la siguiente manera:

$$\liminf x_n = \inf\left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} : x \text{ es punto límite de } (x_n) \right\}$$

$$\limsup x_n = \sup\left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} : x \text{ es punto límite de } (x_n) \right\}$$

VI: Para cualquier sucesión (x_n), $\liminf x_n$ y $\limsup x_n$ son puntos límite de (x_n).

VII: Se tiene siempre $\liminf x_n \leq \limsup x_n$.

VIII. Una sucesión (x_n) es convergente si y sólo si $\liminf x_n = \limsup x_n \in \mathbb{R}$.

IX. Para cualquier sucesión (x_n) se tiene:

$$\liminf x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{j\geq n} \{x_j\} \right)$$

$$\limsup x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{j\geq n}\{x_j\}\right)$$

Teorema 4 (**Lema de Fatou**). *Sea $\{f_n\}_{n\in N}$ una sucesión de funciones medibles no negativas. Entonces:*

$$\int_{\mathbb{E}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{E}} f_n d\mu$$

Demostración

La sucesión $g_n = \inf\{f_j : j \geq n\}$ es no decreciente y $\liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n$, así que, por el teorema de la convergencia monótona:

$$\int_{\mathbb{E}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{E}} g_n d\mu$$

Por otra parte, $g_n \leq f_j$ para cualquier $j \geq n$, así que:

$$\int_{\mathbb{E}} g_n d\mu \leq \inf\left\{\int_{\mathbb{E}} f_j d\mu : j \geq n\right\}$$

Por lo tanto:

$\int_{\mathbb{E}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{E}} g_n d\mu$

$\leq \lim_{n\to\infty} \inf\left\{\int_{\mathbb{E}} f_j d\mu : j \geq n\right\} = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{E}} f_n d\mu$

■

Funciones medibles integrables

Definición 8. *Se dice que una función medible f es integrable sobre un conjunto $E \in \mathcal{E}$ si $\int_E |f|\, d\mu < \infty$.*

Proposición 4. *Si f es una función medible no negativa tal que $\int_{\mathbb{E}} f d\mu < \infty$, entonces $\mu\{y \in \mathbb{E} : f(y) = \infty\} = 0$.*

Demostración

Sea $\Gamma = \{y \in \mathbb{E} : f(y) = \infty\}$, entonces $\int_{\mathbb{E}} I_\Gamma f d\mu \leq \int_{\mathbb{E}} f d\mu < \infty$.

Supongamos $\mu(\Gamma) > 0$ y definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_n(y) = \begin{cases} n & \text{si } y \in \Gamma \\ 0 & \text{si } y \notin \Gamma \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, φ_n es una función medible simple tal que $0 \leq \varphi_n \leq I_\Gamma f$; así que $\int_{\mathbb{E}} I_\Gamma f d\mu \geq \int_{\mathbb{E}} \varphi_n d\mu = n\mu(\Gamma)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\int_{\mathbb{E}} I_\Gamma f d\mu = \infty$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $\mu\{y \in \mathbb{E} : f(y) = \infty\} = \mu(\Gamma) = 0$. ∎

Proposición 3. *Una función medible f es integrable sobre un conjunto $E \in \mathcal{E}$ si y sólo si f^+ y f^- son integrables sobre E.*

Demostración

Se tiene $f^+ \leq |f|$ y $f^- \leq |f|$, así que si f es una función medible integrable sobre E, entonces f^+ y f^- son también integrables sobre E.

Inversamente, si f^+ y f^- son integrables sobre E, entonces $\int_E |f|\, d\mu = \int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu$, así que f es también integrable sobre E.

∎

Definición 9. *Si f es una función medible e integrable sobre un conjunto $E \in \mathcal{E}$, se define su integral sobre E, $\int_E f d\mu$, de la siguiente manera:*

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

Ejercicio 4. *Demuestra que si f y g dos funciones medibles e integrables sobre un conjunto $E \in \mathcal{E}$, entonces:*

a) Para cualquier número real c, la función cf es integrable sobre E y $\int_E cf d\mu = c\int_E f d\mu$.

b) Si $f \leq g$ sobre E, entonces $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.

c) $\left|\int_E f d\mu\right| \leq \int_E |f|\, d\mu$

Proposición 4. *Sean f y g dos funciones medibles e integrables sobre un conjunto $E \in \mathcal{E}$, $\Gamma_1 = \{y \in \mathbb{E} : I_E(y)\,|f(y)| = \infty\}$, $\Gamma_2 = \{y \in \mathbb{E} : I_E(y)\,|g(y)| = \infty\}$ y $h : \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible tal que $h(y) = f(y) + g(y)$ para cualquier $y \in E \cap (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)^c$, entonces h es integrable sobre E y:*

$$\int_E h d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$$

Demostración

Se tiene:

$\mu(\Gamma_1) = \mu(\Gamma_2) = 0$; así que $\mu(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = 0$. Por lo tanto:

$$\int_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)} |f|\, d\mu = \int_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)} |g|\, d\mu = \int_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)} |h|\, d\mu = 0$$

Además:

$|h(y)| \leq |f(y)| + |g(y)|$ para cualquier $y \in E \cap (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)^c$.

Por lo tanto:

$\int_E |h|\, d\mu = \int_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c} |h|\, d\mu + \int_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)} |h|\, d\mu$

$\leq \int_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c} |f|\, d\mu + \int_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c} |g|\, d\mu$

$= \int_E |f|\, d\mu + \int_E |g|\, d\mu < \infty$

Así que h es integrable sobre E.

Demostremos ahora que $\int_E h d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$.

Se tiene:

$\left(fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c} + gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^+ - \left(fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c} + gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^-$

$= fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c} + gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}$

$= \left(fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^+ - \left(fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^- + \left(gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^+ - \left(gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^-$

$= \left(fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^+ + \left(gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^+ - \left(fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^- + \left(gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^-$

Así que:

$\left(fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c} + gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^+ + \left(fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^- + \left(gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^-$

$= \left(fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c} + gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^- + \left(fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^+ + \left(gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^+$

Por lo tanto:

$\int_{\mathbb{E}} \left(fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c} + gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^+ d\mu + \int_{\mathbb{E}} \left(fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^- d\mu + \int_{\mathbb{E}} \left(gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^- d\mu$

$= \int_{\mathbb{E}} \left(fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c} + gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^- d\mu + \int_{\mathbb{E}} \left(fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^+ d\mu + \int_{\mathbb{E}} \left(gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^+ d\mu$

De lo cual se sigue:

$\int_{\mathbb{E}} hI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c} d\mu = \int_{\mathbb{E}} \left(fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c} + gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right) d\mu$

$= \int_{\mathbb{E}} \left(fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c} + gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^+ d\mu - \int_{\mathbb{E}} \left(fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c} + gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^- d\mu$

$= \int_{\mathbb{E}} \left(fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^+ d\mu + \int_{\mathbb{E}} \left(gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^+ d\mu - \int_{\mathbb{E}} \left(fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^- d\mu - \int_{\mathbb{E}} \left(gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^- d\mu$

$= \left(\int_{\mathbb{E}} \left(fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^+ d\mu - \int_{\mathbb{E}} \left(fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^- d\mu\right) + \left(\int_{\mathbb{E}} \left(gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^+ d\mu - \int_{\mathbb{E}} \left(gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}\right)^- d\mu\right)$

$= \int_{\mathbb{E}} fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c} d\mu + \int_{\mathbb{E}} gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c} d\mu$

Así que:

$\int_{\mathbb{E}} hI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}d\mu = \int_{\mathbb{E}} fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}d\mu + \int_{\mathbb{E}} gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}d\mu$

Ahora bien, como:

$\int_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)} |f|\, d\mu = \int_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)} |g|\, d\mu = \int_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)} |h|\, d\mu = 0,$

se tiene:

$$\int_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)} f^+ d\mu = \int_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)} f^- d\mu = 0$$

$$\int_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)} g^+ d\mu = \int_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)} g^- d\mu = 0$$

$$\int_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)} h^+ d\mu = \int_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)} h^- d\mu = 0$$

Así que:

$$\int_{\mathbb{E}} fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)}d\mu = \int_{\mathbb{E}} gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)}d\mu = \int_{\mathbb{E}} hI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)}d\mu = 0$$

Por lo tanto:

$\int_E hd\mu = \int_E hI_{(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}d\mu + \int_E hI_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}d\mu$

$= \int_{\mathbb{E}} hI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}d\mu + \int_{\mathbb{E}} hI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)}d\mu = \int_{\mathbb{E}} hI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}d\mu$

$\int_E fd\mu = \int_E fI_{(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}d\mu + \int_E fI_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}d\mu$

$= \int_{\mathbb{E}} fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}d\mu + \int_{\mathbb{E}} fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)}d\mu = \int_{\mathbb{E}} fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}d\mu$

$\int_E gd\mu = \int_E gI_{(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}d\mu + \int_E gI_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}d\mu$

$= \int_{\mathbb{E}} gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}d\mu + \int_{\mathbb{E}} gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)}d\mu = \int_{\mathbb{E}} gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}d\mu$

Y entonces:

$\int_E hd\mu = \int_{\mathbb{E}} hI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}d\mu = \int_{\mathbb{E}} fI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}d\mu + \int_{\mathbb{E}} gI_{E\cap(\Gamma_1\cup\Gamma_2)^c}d\mu$

$= \int_E fd\mu + \int_E gd\mu$

■

Un razonamiento de inducción permite demostrar el siguiente corolario:

Corolario 2. *Sean $f_1, \ldots, f_n$ n funciones medibles e integrables sobre un conjunto medible E, $a_1, \ldots, a_n$ números reales y $h : \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible tal que $h(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)$ en todos los puntos $x \in E$ para los cuales $\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)$ esté definida, entonces h es integrable sobre E y:*

$$\int_E hd\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_E f_k d\mu$$

Proposición 5. *Sea g una función medibles e integrable tal que $\int_E gd\mu \geq 0$ para cualquier $E \in \mathcal{E}$, entonces:*

$$\mu \{x \in \mathbb{E} : g(x) < 0\} = 0$$

Demostración

Supongamos que $\int_E gd\mu \geq 0$ para cualquier $E \in \mathcal{E}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $E_n = \left\{x \in \mathbb{E} : g(x) < -\frac{1}{n}\right\}$, entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$0 \leq \int_{E_n} gd\mu \leq -\frac{1}{n}\mu(E_n)$$

Así que $\mu(E_n) = 0$.

Finalmente:

$$\mu \{x \in \mathbb{E} : g(x) < 0\} = \mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightsquigarrow \infty} \mu(E_n) = 0$$

■

Corolario 3. *Sean f y g dos funciones medibles e integrables.*

a) Si $\int_E fd\mu \leq \int_E gd\mu$ para cualquier $E \in \mathcal{E}$, entonces:

$$\mu \{x \in \mathbb{F} : f(x) > g(x)\} = 0$$

b) Si $\int_E fd\mu = \int_E gd\mu$ para cualquier $E \in \mathcal{E}$, entonces:

$$\mu \{x \in \mathbb{F} : f(x) \neq g(x)\} = 0$$

Pasemos ahora a demostrar el segundo de los teoremas de convergencia de la integral.

Teorema 5. *Sea g una función no negativa, integrable sobre un conjunto $E \in \mathcal{E}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tales que $|f_n| \leq g$ y $\lim_{n\to\infty} f_n$ existe excepto a lo más en un conjunto de medida cero y f una función medible tal que $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, donde este límite existe, entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \, d\mu = 0$$

Demostración

Sea $\Gamma = \{y \in E : \lim_{n\to\infty} f_n(y) \text{ existe}\}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $h_n = 2g - |f_n - f| \, I_\Gamma$, entonces, por el lema de Fatou, se tiene:

$2\int_E gd\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} h_n d\mu$

$\leq \liminf_{n\to\infty} \int_E h_n d\mu = 2\int_E gd\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \, I_\Gamma d\mu$

Así que:

$$\text{lím sup}_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu = \text{lím sup}_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\, I_\Gamma d\mu = 0$$

Por lo tanto:

$$\text{lím}_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu = 0 \qquad \blacksquare$$

Corolario 4 (**Teorema de la convergencia dominada**). *Sea g una función no negativa, integrable sobre un conjunto medible E, $\{f_n\}_{n\in N}$ una sucesión de funciones medibles tales que $|f_n| \leq g$ y $\text{lím}_{n\to\infty} f_n$ existe excepto a lo más en un conjunto de medida cero y f una función medible tal que $f = \text{lím}_{n\to\infty} f_n$, donde este límite existe entonces, f es integrable sobre E y:*

$$\int_E f d\mu = \text{lím}_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Demostración

Sea $\Gamma = \{y \in E : \text{lím}_{n\to\infty} f_n(y) \text{ existe}\}$. Entonces:

$$f I_\Gamma = \text{lím}_{n\to\infty} f_n I_\Gamma$$

Así que:

$$|f|\, I_\Gamma = I_\Gamma \, \text{lím}_{n\to\infty} |f_n| \leq g$$

Por lo tanto f es integrable sobre E.

Por otra parte, se tiene:

$$\left|\int_E (f_n - f)\, d\mu\right| \leq \int_E |f_n - f|\, d\mu$$

Así que, como $\text{lím}_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu = 0$, el límite $\text{lím}_{n\to\infty} \left|\int_E (f_n - f)\, d\mu\right|$ existe y:

$$\text{lím}_{n\to\infty} \left|\int_E (f_n - f)\, d\mu\right| = 0$$

Por lo tanto, $\text{lím}_{n\to\infty} \int_E (f_n - f)\, d\mu$ existe y:

$$\text{lím}_{n\to\infty} \int_E (f_n - f)\, d\mu = 0$$

Además:

$$\int_E (f_n - f)\, d\mu = \int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu$$

Así que:

$$\int_E f_n d\mu = \int_E (f_n - f)\, d\mu + \int_E f d\mu$$

Por lo tanto:

$$\text{lím}_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu \qquad \blacksquare$$